Seria 8. zadań z Mechaniki Statystycznej
6 grudnia 2007 r.

Zad 1. Sprawdzić następujące własności operatora gęstości $\hat{\rho} = \sum_\alpha p_\alpha P_{\varphi_\alpha}$, gdzie stany $|\varphi_\alpha\rangle$ są unormowane $\langle\varphi_\alpha|\varphi_\alpha\rangle = 1$ (ale niekoniecznie ortogonalne) oraz $\sum_\alpha p_\alpha = 1$

1. $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$
2. $\mathrm{Tr}\hat{\rho} = 1$
3. $\hat{\rho}$ jest dodatnim operatorem, czyli $\forall_{|\varphi\rangle}\langle\varphi_\alpha|\hat{\rho}|\varphi_\alpha\rangle \geq 0$
4. (*) Warunek dostateczny i konieczny by $\hat{\rho}$ opisywał stan czysty jest postaci $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$

Zad 2. a) Rozważmy stan $|\psi\rangle$ składający się z dwóch cząstek

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{N} c_j|\varphi_j \otimes \chi_j\rangle \ ,$$

gdzie $c_j \in \mathbb{C}$, $\varphi_j \in \mathcal{H}_1^{(N)}$, $\chi_j \in \mathcal{H}_2^{(N)}$ (indeks górny numeruje wymiar przestrzeni hilberta, a dolny numeruje cząstki). Posługując się podaną na wykładzie definicją zredukowanego operatora gęstości $\hat{\rho}^{(1)} = \mathrm{Tr}_2\hat{\rho}$ znaleźć postać operatora $\hat{\rho}^{(1)}$. Pod jakim warunkiem na stany $|\chi_j\rangle$ operator $\hat{\rho}^{(1)}$ przyjmuje postać

$$\hat{\rho}^{(1)} = \sum_i \lambda_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \ .$$

Jaką postać ma $\hat{\rho}^{(1)}$ gdy stan układu 2-cząstkowego reprezentowany jest przez iloczyn tensorowy $|\psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle$.

b) Rozważyć przypadek gdy $N = 2$ kiedy stan układu dwóch cząstek nie jest iloczynem tensorowym (tzw. stan splątany)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| + \otimes - \rangle - | - \otimes + \rangle) \ , \qquad |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Obliczyć $\hat{\rho}^{(1)}$ dla tego przypadku. Czy obliczone $\hat{\rho}^{(1)}$ odpowiada stanowi czystemu drugiej cząstki?

Zad 3. Dla paramagnetyka Brillouina wyznaczyć $S(T, H, N)$. Obliczyć entropię w dwóch granicach: $H \to 0$, $T \to 0$.

Zad 4. Układ złożony z N nieoddziałujących cząstek ma temperaturę T. Każda cząstka może znajdować się w jednym z dwóch stanów, których różnica energii wynosi ε. Narysuj schematyczny wykres ciepła właściwego na jedną cząstkę dla tego układu (tzw. ciepło Schotky'ego) w zależności od temperatury, w szczególności znajdź granice $T \to 0$, $T \to \infty$ oraz wszystkie ekstrema.

Zad 5. Rozważamy gaz elektronów będących w wysokiej temperaturze (tak że możemy pominąć kwantowe efekty w statystyce cząstek). Układ znajduje się w kontakcie ze zbiornikiem energii i cząstek, scharakteryzowany temperaturą T oraz potencjałem chemicznym μ. Elektrony oddziałują z zewnętrznym polem magnetycznym (w kierunku „z"), tak że cząstki o dodatnim rzucie spinu na oś „z" mają w związku z tym energię $-\varepsilon$, natomiast dla sytuacji przeciwnej $+\varepsilon$. Dodatkowo elektrony mają jak zwykle energię kinetyczną.
a. Znajdź entropię układu w funkcji T, μ, V.
b. Znajdź potencjał chemiczny dla tego układu w funkcji ciśnienia i temperatury.

termin oddania: 11 grudnia 2007 przed ćwiczeniami, adres z zadaniami:

`www.fuw.edu.pl/~fdutka/mechstat`